

## Übungsblatt 4

Universität Mannheim  
Analysis I / HWS 2007/08  
Martin Schmidt  
Jörg Zentgraf

1. Beweisen Sie folgende Aussagen für beliebige komplexe Zahlen  $z, w$

- (a)  $\left| \frac{z+1}{z-1} \right| \geq 1 \iff \Re(z) \geq 0$   
(b)  $\left| \frac{z+i}{z-i} \right| = 1 \iff \Im(z) = 0$   
(c)  $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$  (4 Punkte)

2. Stellen Sie die folgenden Zahlen in der Form  $a + ib$  dar :

- (a)  $\frac{3+i}{4-i}$   
(b)  $\frac{(1+2i)^3 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}$  (3 Punkte)

3. Bestimmen Sie und skizzieren Sie in der komplexen Zahlenebene die folgenden Mengen :

- (a)  $\{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z^2) > 2\}$   
(b)  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| < 4\}$  (3 Punkte)

4. Seien  $a, b, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  reelle Zahlen. Beweisen Sie : Erfüllt  $z = a + ib$  die Gleichung

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

dann erfüllt auch  $\bar{z} = a - ib$  diese Gleichung. (2 Punkte)

5. Es seien  $a, b, c, d$  natürliche Zahlen und  $P = a^2 + b^2, Q = c^2 + d^2$ . Beweisen Sie, dass es dann auch natürliche Zahlen  $e$  und  $f$  gibt, so dass

$$PQ = e^2 + f^2$$

gilt. Hinweis : Rechnen Sie in  $\mathbb{C}$  und nutzen Sie aus, dass  $|z|^2 = x^2 + y^2$  für  $z = x + iy$  gilt. (2 Punkte)

6. Eine  $n$ -te Einheitswurzel ist eine Lösung der Gleichung  $z^n = 1$ , wobei  $z$  eine komplexe Zahl ist. Berechnen Sie die 3-ten Einheitswurzeln und zeigen Sie, dass diese ein gleichseitiges Dreieck bilden. (4 Punkte)

7. Beweisen Sie, dass die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  definiert durch  $x_n = \frac{2n-1}{n+3}$  gegen 2 konvergiert. Finden Sie für  $\epsilon = 10^{-5}$  ein  $N \in \mathbb{N}$ , so dass  $|x_n - 2| < \epsilon$  für alle  $n \geq N$  gilt. (2 Punkte)

- 8.\* Geben Sie zu  $z = a + ib \in \mathbb{C}$  explizit alle komplexen Zahlen  $w = \alpha + i\beta$  an, mit  $w^2 = z$ . Explizit heißt hier : durch konkrete Angabe der reellen Zahlen  $\alpha$  und  $\beta$ . (3 Zusatzpunkte)

**Abgabe bis Freitag, den 5. Oktober um 10:00 Uhr in A5**