

Übungsblatt 8

Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen für $x \in \mathbb{K}$:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (n^3/3^n) x^n$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{(n^3+n^2+1)}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 4^n}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$ (6 Punkte)

2. Bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}, x \neq -3$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^2} \left(\frac{1+x}{x+3}\right)^n$$

divergiert bzw. konvergiert. (2 Punkte)

3. (a) Sei $\sum a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \geq 0$ und endlichem Konvergenzradius $R > 0$. Beweisen Sie, dass falls die Potenzreihe für $x = R$ konvergiert, dann konvergiert sie auch für $x = -R$.
(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Potenzreihe, deren Konvergenzbereich exakt $(-1, 1]$ ist. (4 Punkte)

4. Zeigen Sie : Für alle $x, y \in \mathbb{K}$ gilt

- (a) $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- (b) $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- (c) $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$
- (d) $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ (4 Punkte)

5. Für alle $x \in \mathbb{K}$ sei

$$\sinh(x) := \frac{1}{2} (\exp(x) - \exp(-x)) \quad \cosh(x) := \frac{1}{2} (\exp(x) + \exp(-x))$$

Beweisen Sie für $x, y \in \mathbb{K}$

- (a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- (b) $\cosh(x+y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$ (4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, den 2. November um 10 Uhr in A5