

Übungsblatt 13

Universität Mannheim
Analysis I / HWS 2007/08
Martin Schmidt
Jörg Zentgraf

1. Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 (x^2+x) dx$ mit Hilfe von Riemannsummen. Wählen Sie dabei als Partition die Punkte $x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n$ und als Zwischenpunkt jeweils den Mittelpunkt des Intervalls. Benutzen Sie dabei $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ und $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n(n+1)$.
(3 Zusatzpunkte)

2. Berechnen Sie mit Hilfe von Integralen den Flächeninhalt des Kreises mit Radius $R > 0$.
(3 Zusatzpunkte)

3. Beweisen Sie für $k \in \mathbb{N}$ die folgende Formel :

$$\int \cos^k(x) dx = \frac{1}{k} \cos^{k-1}(x) \sin(x) + \frac{k-1}{k} \int \cos^{k-2}(x) dx$$

(3 Zusatzpunkte)

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale und machen Sie jeweils die Probe durch Differentiation.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{(b)} \int x \arcsin(x) dx \\ \text{(c)} \int \sin^3(x) dx & \text{(d)} \int \frac{1}{\sin(x)} dx \end{array}$$

Hinweis zu (d): $\sin(x) = 2 \sin(\frac{x}{2}) \cos(\frac{x}{2}) = 2 \tan(\frac{x}{2}) \cos^2(\frac{x}{2})$.
(10 Zusatzpunkte)

5. Berechnen Sie die folgenden Integrale durch Transformation der Variablen.

$$\text{(a)} \int_1^{64} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} dx \quad \text{(b)} \int_1^8 \frac{\exp(1/x)}{x^2} dx$$

(4 Zusatzpunkte)

6. Berechnen Sie mit Hilfe von Partialbruchzerlegung das Integral

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x^4 + 2x^2 - 8x + 5} dx$$

(4 Zusatzpunkte)

Abgabe bis Freitag, den 7. Dezember um 10 Uhr in A5